МНОГООБРАЗИЯ ЭЙНШТЕЙНА С НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КОНФОРМНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Чернявский Д.В. Email: Chernyavsky1136@scientifictext.ru

Чернявский Дмитрий Викторович – лаборант,
Международная лаборатория математической физики,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск

Аннотация: *применяя метод нелинейных реализаций, проводится построение метрик на факторпространстве l-конформной группы Галилея. Размерность факторпространства зависит от параметра l и каждому генератору ускорений соответствует одно дополнительное измерение. Метрики на факторпространстве деформируются включением дополнительного измерения таким образом, чтобы полученные метрики описывали эйнштейновские многообразия и обладали l-конформной группой изометрии. Также они включают в себя метрику* AdS_2 *и имеют ультрагиперболическую сигнатуру.*
Ключевые слова: *нерелятивистская конформная алгебра, многообразия Эйнштейна.*

EINSTEIN MANIFOLDS WITH NONRELATIVISTIC CONFORMAL SYMMETRY

Chernyavsky D.V.

Chernyavsky Dmitry Viktorovich – Laboratory Assistant,
LABORATORY OF MATHEMATICAL PHYSICS,
NATIONAL RESEARCH TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY, TOMSK

Abstract: *the nonlinear realization method is applied to construct metrics on the coset spaces of l-conformal Galilei algebra. The dimension of coset grows with l so that to each generator of accelerations of the l-conformal algebra there correspond extra space dimension. In order to construct Einstein manifolds using the metrics on the coset spaces, we extend them by additional space dimension. The resulting metrics describe Einstein manifolds with l-conformal isometry group. They involve* AdS_2 *metric and have ultrahyperbolic signature.*
Keywords: *nonrelativistic conformal symmetry, Einstein manifolds.*

УДК 530.12

1. Введение

В последние годы наблюдается растущий интерес к нерелятивистским конформным алгебрам. Алгебра Галилея допускает конформное расширение, которое параметризуется (полу)целым параметром l и носит название l-конформной алгебры Галилея [1]. Эта алгебра обобщает нерелятивистские алгебры Шредингера и конформную алгебру Галилея. Отличительной особенностью l-конформной алгебры является наличие генераторов ускорений, которые естественным образом обобщают генераторы галилеевских бустов. До сих пор большинство исследований, касающихся l-конформной алгебры, были направлены на построение и изучение ее динамических реализаций [2]-[4]. В этой связи представляет интерес изучение алгебры в геометрическом и гравитационном контекстах.

Основной целью настоящей работы является построение решений уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, также известных как “эйнштейновские многообразия” и имеющих l-конформную группу изометрий. Для этого будет применен теоретико-групповой метод построения инвариантных метрик на факторпространстве l-конформной группы. Затем, деформировав метрики включением дополнительно измерения, мы построим эйнштейновские многообразия с l-конформной группой симметрии.

1. l-конформная алгебра Галилея

l-конформная алгебра включает в себя генератор трансляций по времени H, генератор дилатаций D, генератор специальных конформных преобразований K, генераторы пространственных вращений M_{ij} и $(2l+1)d$ векторных генераторов $C_i^{(n)}$, где $n = 0,1,2,..,2l$ и $i = 1,\dots,d$ имеет следующий вид [1]:

$$[H,D] = iH, \qquad [H,K] = 2iD, \qquad [D,K] = iK,$$

$$[H,C_i^{(n)}]=inC_i^{(n-1)}, \qquad [D,C_i^{(n)}]=i(n-l)C_i^{(n)},$$
$$[K,C_i^{(n)}]=i(n-2l)C_i^{(n+1)},\ [M_{ij},C_k^{(n)}]=-i\delta_{ik}C_j^{(n)}+i\delta_{jk}C_i^{(n)},$$
$$[M_{ij},M_{kl}]=-i\delta_{ik}M_{jl}-i\delta_{jl}M_{ik}+i\delta_{il}M_{jk}+i\delta_{jk}M_{il}. \qquad (1)$$

При $l=\frac{1}{2}$ алгебра (1) изоморфна алгебре Шредингера; алгебра при $l=1$ может быть получена контракцией релятивистской конформной алгебры.

2. Конструкция метрики на косете

Как обсуждается во введении, построение многообразий Эйнштейна с l-конформной симметрией мы будем проводить, используя формы Маурера-Картана (МК) на факторпространстве соответствующей группы. Определим косет как факторпространство всей l-конформной группы по подгруппе, генерируемой операторами дилатаций D и вращений M_{ij}. Для построения инвариантных метрик относительно действия l-конформной группы Галилея, параметризуем соответствующее пространство косетов следующим образом:

$$u=e^{itH}e^{irK}e^{ix_i^{(n)}C_i^{(n)}}, \qquad (2)$$

где t, r и x^n – координаты на косете. Один-формы МК $u^{-1}du=i(\omega_H H+\omega_K K+\omega_D D+\omega_i^{(n)}C_i^{(n)})$ имеют следующий вид:

$$\omega_i^{(n)}=dx_i^{(n)}+2r(n-l)x_i^{(n)}dt-(n+1)x_i^{(n+1)}dt-(n-2l-1)x_i^{(n-1)}(r^2dt+dr),$$
$$\omega_H=dt, \qquad \omega_K=r^2dt+dr, \qquad \omega_D=-2rdt, \qquad (3)$$

где

$$x_i^{(-1)}=x_i^{(2l+1)}=0. \qquad (4)$$

Для построения инвариантной квадратичной формы рассмотрим в общем случае действие некоторой группы G с подгруппой H на факторпространстве G/H, индуцирующее преобразование координат $x\to x'$. Как известно, формы Маурера-Картана на факторпространстве ω^a не инвариатны относительно действия группы, но преобразуются однородно (см., например, [5]):

$$\omega^a(x')=\omega^a(x)+\omega^c(x)\varepsilon^I W_I^i(x)f_{ic}^a. \qquad (5)$$

где f_{ic}^a – структурные константы алгебры, ε^I – параметры инфинитеземального преобразования, W_i^I – так называемый H-компенсатор. При построении инвариантных квадратичных форм явный вид H-компенсатора не играет роли и важна лишь структура преобразования (5). Индекс I пробегает значения по всем генераторам алгебры, индекс i пробегает значения по генераторам алгебры, генерирующей подгруппу, по которой взят фактор, в то время как оставшиеся индексы p и q пробегают значения по генераторам алгебры, генерирующим факторпространство.

Используя закон преобразования (5), можно построить инвариантную квадратичную форму на факторпространстве l-конформной группы Галилея

$$ds^2=\alpha\omega_H\omega_K+S_{n,m}\omega_i^{(n)}\omega_i^{(m)}, \qquad (6)$$

где матрица S_{mn} подчиняется условию

$$S_{m,n}(m+n-2l)=0, \quad \forall\, m,n. \qquad (7)$$

Таким образом, квадратичная форма (6), инвариантная относительно действия l-конформной группы, вовлекает $1+\frac{2l+1}{2}$ независимых постоянных параметров для полуцелого l и $1+(l+1)$ для целого l.

3. Многообразия Эйнштейна

Для построения эйнштейновских многообразий с l-конформной симметрией Галилея перейдем в стандартный AdS-базис, заменив временную координату

$$t \to \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{r}\right). \qquad (8)$$

Также для даьнейшего анализа введем обозначения

$$a_i^{(n)} = r(n-l)x_i^{(n)} - \frac{1}{2}(n+1)x_i^{(n+1)} - \frac{1}{2}r^2(n-2l-1)x_i^{(n-1)},$$

$$b_i^{(n)} = -\frac{1}{r}(n-l)x_i^{(n)} + \frac{1}{2r^2}(n+1)x_i^{(n+1)} - \frac{1}{2}(n-2l-1)x_i^{(n-1)} \qquad (9)$$

в которых формы МК $\omega_i^{(n)}$ имеют вид

$$\tilde{\omega}_i^{(n)} = dx_i^{(n)} + a_i^{(n)}d\tilde{t} + b_i^{(n)}dr. \qquad (10)$$

В этой координатной системе запишем метрику (6), расширив ее включением дополнительной координаты y:

$$ds^2 = \alpha\left(r^2 d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{r^2}\right) + S(y)_{n,m}\tilde{\omega}_i^{(n)}\tilde{\omega}_i^{(m)} + \varepsilon dy^2, \qquad (11)$$

где мы полагаем, что коэффициенты матрицы $S_{m,n}$ являются функциями y, а параметр α постоянен. Мы полагаем, что y остается неизменным под действием l-конформной группы. Также необходимо отметить, что произвольная функция от y перед dy^2 всегда может быть поглощена переопределением координаты y, оставляя лишь произвол в выборе знака $\varepsilon = \pm 1$.

Перейдем к анализу уравнений

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = 0. \qquad (12)$$

Выпишем компоненты R_{xx} тензора Риччи

$$R_{\{mi\}\{nj\}} = \frac{\varepsilon}{4}S^{p,q}\left(S'_{p,(m}S'_{n),q} - S'_{p,q}S'_{m,n}\right)\delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{2}S''_{m,n}\delta_{ij} + \Omega_{mn}\delta_{ij}, \qquad (13)$$

где мы ввели обозначения $R_{\{mi\}\{nj\}} = R_{mn}\delta_{ij}$ и

$$\Omega_{mn} = \frac{1}{4\alpha}\left(q(p-2l)S^{q,p}S_{q-1,m}S_{n,p+1} - m(n-2l)S_{m-1,n+1}\right) + m \leftrightarrow n. \qquad (14)$$

Далее будем полагать, что в матрице $S(y)_{m,n}$ лишь одна независимая функция от y, и пользоваться обозначением $S_{m,n}(y) = s(y)S_{m,n}$. Можно убедиться, что требование пропорциональности компонент R_{xx} тензора Риччи метрике приводит к требованию равенства нулю матрицы Ω_{mn}. Это требование, в свою очередь, накладывает реккурентное соотношение на коэффициенты матрицы $S_{m,n}$

$$S_{m,n} = \varepsilon_{mn}\frac{n}{m+1}S_{m+1,n-1}, \qquad (15)$$

где ε_{mn} принимает значения ± 1. Алгебраическое условие (15) связывает все компоненты матрицы $S_{m,n}$ и, таким образом, в матрице $S_{m,n}$ остается лишь один независимый параметр. С учетом этих условий, уравнение (13) сводится к следующему ограничению на функцию $s(y)$:

$$\varepsilon\frac{s'^2}{s}\left(-\frac{1}{4}d(2l+1)+\frac{1}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}s''+\lambda s=0. \qquad (16)$$

Общее решение этого уравнение имеет вид

$$s_1=C_1\exp(ky), \qquad s_2=C_2\exp(-ky). \qquad (17)$$

где

$$k^2=\frac{4\lambda\varepsilon}{d(2l+1)}, \qquad (18)$$

с произвольными постоянными C_1 и C_2. Можно видеть, что требование вещественности метрики накладывает ограничение на знак произведения: $\lambda\varepsilon>0$.

Анализ оставшихся компонент тензора Риччи показывает, что уравнения Эйнштейна (12) выполняются, если наложить следующее ограничение на параметры

$$\alpha=-\frac{c}{\lambda}, \qquad (19)$$

где константа c определена соотношением

$$c=\varepsilon+\frac{l(l+1)(2l+1)d\varepsilon}{6}-\frac{d\varepsilon}{4}(p+1)(q-2l-1)S^{p+1,q-1}S_{p,q}. \qquad (20)$$

4. Заключение

В настоящей работе был применен теоретико-групповой метод построения метрик на факторпространстве l-конформной группы Галилея. Построенные метрики были деформированы включением дополнительной координаты, не нарушая при этом симметрии исходной метрики с l-конформной группой изометрий. Записав анзац, мы нашли общее решение уравнений Эйнштейна с космологической постоянной, построив таким образом эйнштейновское многообразие с l-конформной группой изометрий.

Работа поддержана грантом Президента РФ МК-2101.2017.2.

Список литературы / References

1. *Negro J.* Nonrelativistic conformal groups / J. Negro J., M.A. del Olmo, A. Rodriguez-Marco // Journal of Mathematical Physics, 1997. Vol. 38. P. 3786-3809.
2. *Galajinsky A.* On dynamical realizations of l-conformal Galilei and Newton-Hooke algebras / A. Galajinsky and I. Masterov // Nuclear Physics B., 2015. Vol. 896. P. 244-254.
3. *Galajinsky A.* Dynamical realizations of l-conformal Newton-Hooke group / A. Galajinsky and I. Masterov // Physics Letters B., 2013. Vol. 723. P. 190
4. *Fedoruk S.* Galilean conformal mechanics from nonlinear realizations / S. Fedoruk, E. Ivanov, J. Lukierski // Physical Review D., 2011. Vol. 83 – 085013.
5. *Alonso-Alberca N.* Geometric construction of Killing spinors and supersymmetry algebras in homogeneous space-times / N. Alonso-Alberca, E. Lozano-Tellechea and T. Ortin // Classical and Quantum Gravity, 2002. Vol. 19. P. 6009-6024.