

INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE BURGERS WITH FIXED PARAMETERS

Omurov T.¹, Ryspaev A.², Omurov M.³

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА С ФИКСИРОВАННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Омуров Т. Д.¹, Рыспаев А. О.², Омуров М. Т.³

¹Омуров Таалайбек Дардайылович / Omurov Taalaibek – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, факультет математики и информатики;

²Рыспаев Амантур Орозалиевич / Ryspaev Amanur – кандидат физико-математических наук, и.о. доцента;

³Омуров Максат Таалайбекович / Omurov Maksat – старший преподаватель, кафедра программной инженерии и инновационных технологий, факультет информационных и инновационных технологий,

Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: в данной работе изучаются обратные задачи типа Бюргерса с фиксированным параметром вязкости неограниченной области и построенные решения обладают свойством условной гладкости. В частности, указанные классы задач встречаются в теории фильтрации и в теории волн, например, при решении обратной задачи в области фильтрации [3, 6], где решение считается известным в некоторой фиксированной точке пространства во все моменты времени, а искомым является какой-нибудь коэффициент уравнения - функция от одной координат или функция от времени и др.

Abstract: in this work are studied inverse problems type of Burgers with fixed parameters of viscosity an unbounded domain and constructed solve has property conditional smoothness. In particular, the specified classes of tasks meet in filtering theory and the theory of waves, for example, when solving the inverse problem in the field of filtration [3,6], where the decision is considered to be known at a fixed point in space at all moments time, and is a sought some equation coefficient - a function of one coordinate or a function of time, and others.

Ключевые слова: обратные задачи типа Бюргерса, нагруженные уравнения, фиксированный параметр, метод вспомогательной функции, метод регуляризации, гладкие и условно-гладкие функции.

Keywords: inverse problems of the Burgers type, loaded equation, fixed parameter, method auxiliary function, regularization, smooth and conditionally smooth functions.

УДК 517.9

Введение

В работе исследуются обратные задачи типа Бюргерса с фиксированным параметром вязкости [3, 5, 6]. Отметим, что аналогичные прямые или нагруженные задачи Бюргерса с различными значениями параметра вязкости с позиции численных или аналитических методов были изучены в работах [1,2,5, 7,9,10] и др. В нашем случае на основе методов Соболева, вспомогательной функции и регуляризации исследуем исходные обратные задачи, причем, построенные решения обладают свойством условной гладкости или гладкости в [4]: $W_{\lambda}^2(D_0)$, $W_C(\bar{D}_0)$ соответственно. Эти факты доказываются на основе гладких входных данных, которые задаются как необходимые условия разрешимости исследуемой задачи.

Пусть

$$U_t + P(t, x, U)U_x = \mu_0 U_{x^2} + \tilde{f}(t), \forall (t, x) \in \bar{D}_0, (D_0 = (0, T_0) \times R), \quad (1)$$

$$U(0, x) = \varphi(x), x \in R, \quad (2)$$

$$U(t, x_0) = \psi(t), t \in [0, T_0], \quad (3)$$

P, φ, ψ, γ - известные данные, а параметр вязкости задается в виде

$$\mu_0 \geq 1, (\mu_0 = \text{const}). \quad (4)$$

При этом ставится задача нахождения функций $\Psi = (U; f)$ в пространстве:

a₁) $W_{\lambda}^2(D_0) = (G_{\lambda}^2(D_0); L_{\gamma}^2(0, T_0))$, когда функция $\tilde{f}$ определяется в виде

$$\begin{cases} \tilde{f} \equiv \gamma(t)f(t), (f(0) = 0), \\ 0 < \gamma(t) \in L^1(0, T_0); \phi(t) = \int_0^t \gamma(s)ds, (\phi(0) = 0), L_{\gamma}^2(0, T_0) \ni f(t), \end{cases} \quad (5)$$

при этом:

$$\left\{ \begin{aligned} \sup_R |\varphi^{(k)}(x)| &\leq \beta_0, (k=0,1,2), \\ \sup_{\bar{D}_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R \exp(-s^2) |\varphi^{(k)}(x+2s\sqrt{\mu_0 t})| ds &\leq \beta_0, (k=0,1,2), \\ \sup_{\bar{D}_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R (\exp(-s^2)) |s| \times |\varphi_l(x+2s\sqrt{\mu_0 t})| ds &\leq \beta_1, (l=x+2s\sqrt{\mu_0 t}), \\ (\sqrt{\mu_0} \int_0^{T_0} \lambda(t) \frac{1}{t} [\sup_{\bar{D}_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R (\exp(-s^2)) |s| \times |\varphi_l(x+2s\sqrt{\mu_0 t})| ds]^2 dt)^{\frac{1}{2}} &\leq \beta_1 \sqrt{\mu_0 q_0}, \\ (\int_0^{T_0} \lambda(t) (\psi'(t))^2 dt)^{\frac{1}{2}} &\leq \beta_2, (0 < \beta_i; i=0,1,2); \quad 0 < \lambda(t): \int_0^{T_0} \lambda(t) \frac{1}{t} dt = q_0 = \text{const}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

здесь пространство $W_\lambda^2(D_0)$ имеет норму

$$\left\{ \begin{aligned} \|\Psi\|_{W_\lambda^2(D_0)} &= \|U\|_{G_\lambda^2(D_0)} + \|f\|_{L_\gamma^2(0,T_0)}, \\ \|U\|_{G_\lambda^2(D_0)} &= \|U\|_{C^{0,2}(\bar{D}_0)} + [\sup_{\bar{D}_0} \int_0^t \lambda(t) |U_t(t,x)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}, \\ \|f\|_{L_\gamma^2(0,T_0)} &= [\int_0^{T_0} \gamma(t) |f(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

так как относительно решения уравнение (1) с условиями (2), (3) требуется гладкость второго порядка только по $x \in R$, а производная во времени определяется для всех $t > 0$.

а₂) Во многих прикладных задачах начальная функция $\varphi \in C^3(R)$, а $C[0, T_0] \ni \tilde{f}$ -произвольная неизвестная функция, причем

$$\tilde{f}(0) = q = \text{const}. \quad (7)$$

Тогда обратная задача (1)-(3) и (7) исследуется в $W_C(\bar{D}_0) = (\tilde{C}^{1,2}(D_0); C[0, T_0])$ с нормой

$$\left\{ \begin{aligned} \|\Psi\|_{W_C(\bar{D}_0)} &= \|U\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} + \|\tilde{f}\|_{C[0, T_0]}, (\Psi = (U, \tilde{f})), \\ \|U\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} &= \|U\|_{C^{0,2}(\bar{D}_0)} + \|U_t\|_{C(\bar{D}_0)}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

I. Рассмотрим задачу (1)-(3), (5) с условием (а₁) в классе функций $W_\lambda^2(D_0)$.

С этой целью, для решения этой задачи введем обозначение

$$\mathbf{A)} \quad Q(t, x) = \tilde{f}(t) - P(t, x, U) U_x, \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \quad (9)$$

уравнение (1) эквивалентно преобразуется на основе метода Соболева [8] к виду

$$\begin{cases}
U = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0 t}} \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0 t}\right) \varphi(s) ds + \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} Q(v,s) ds dv = \\
= M_1(t,x) + \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} Q(v,s) ds dv = M_1(t,x) + \\
+ \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{\tilde{f}(v) - P(v,s,U(v,s))U_s(v,s)\} ds dv = M_1(t,x) + \\
+ \int_0^t \tilde{f}(v) dv - \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} P(v,s,U(v,s))U_s(v,s) ds dv, \\
M_1(t,x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R \exp(-\tau^2) \varphi(x + 2\tau\sqrt{\mu_0 t}) d\tau, (s-x = 2\tau\sqrt{\mu_0 t}),
\end{cases}$$

(10)

где неизвестными функциями являются $(U(t,x); \tilde{f}(t))$. Поэтому, с учетом (3), (9) из (10) следует

$$\begin{cases}
\psi(t) = M_1(t,x_0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) Q(v,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv = M_1(t,x_0) + \\
+ \int_0^t \tilde{f}(v) dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) P[v,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; U(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)})] \times \\
\times U_\rho(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv, \\
Q(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}) = \tilde{f}(t) - P[v,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; U(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)})] \times \\
\times U_\rho(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}), \\
s-x_0 = 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; \rho = x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}
\end{cases}$$

(11)

или из (11) получим

$$\int_0^t \tilde{f}(v) dv = \psi(t) - M_1(t,x_0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) P[v,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; U(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)})] U_\rho(t,x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv \equiv (B_0[U, U_x])(t).$$

(12)

Тогда из (10) на основе (12) имеем

$$\begin{aligned}
U = M_1(t,x) + (B_0[U, U_x])(t) - \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} P[v,x + \\
+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; U(t,x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)})] U_s(v,s) ds dv.
\end{aligned}$$

(13)

С другой стороны, (13) дифференцируя по x , получим

$$\begin{aligned}
U_x = M_{1x}(t,x) - \int_0^t \int_R \left(\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \right) \frac{s-x}{2\mu_0(t-v)} \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} P(v,s,U(v,s)) \times \\
\times U_s(v,s) ds dv = M_{1x}(t,x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \frac{\tau}{\sqrt{\mu_0(t-v)}} P[v,x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}; U(t,x + \\
+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)})] U_\rho(v,x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv, (\rho = x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-v)}).
\end{aligned}$$

(14)

Далее, объединяем (13), (14) как систему интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Абеля второго рода, т.е.:

$$\begin{cases}
W = U_x(t, x), \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \\
U = M_1(t, x) + (B_0[U, W])(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) P[\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(t, x + \\
+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)})] W(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) d\tau d\nu \equiv (B_0[U, W])(t) + (P_1[U, W])(t, x) \equiv \\
\equiv (H_1[U, W])(t, x), \\
W = M_{1x}(t, x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \frac{\tau}{\sqrt{\mu_0(t-\nu)}} P[\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(t, x + 2\tau \times \\
\times \sqrt{\mu_0(t-\nu)})] W(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) d\tau d\nu \equiv (H_2[U, W])(t, x), \\
(P_1[U, W])(t, x) \equiv M_1(t, x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) P[\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(t, x + 2\tau \times \\
\times \sqrt{\mu_0(t-\nu)})] W(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) d\tau d\nu.
\end{cases} \quad (15)$$

Тогда система (15) разрешима в классе непрерывных функций. Сказанное утверждение можно и доказать на основе принципа Банаха[8], учитывая:

$$\begin{cases}
H_i : L_{H_i} \leq \frac{d}{2}, \quad (i = \overline{1, 2}), \\
\sum_{i=1}^2 L_{H_i} \leq d_0(1 + \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}) \leq d < 1, (\mu_0 \geq 1), \\
H_i : S_r(0) \rightarrow S_r(0), \\
S_r(0) = \{U, W : |U|, |W| \leq r, \forall (t, x) \in \bar{D}_0\},
\end{cases} \quad (16)$$

так как

$$\begin{cases}
\sup_{D_1} \{|P_U^{(j)}(t, x, U)|; |P_x(t, x, U)|\} \leq P_0 = \text{const}, (j = 0, 1), D_1 = \bar{D}_0 \times R, \\
L_{H_1} = \sup_{\bar{D}_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) [|P(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}))| + r |P_l(\nu, x + \\
+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}))|] d\tau d\nu \leq P_0 T_0 (1 + r), \\
L_{H_2} = \sup_{\bar{D}_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \frac{1}{\sqrt{\mu_0(t-\nu)}} [|P(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}))| + \\
+ r |P_l(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(\nu, x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}))|] d\tau d\nu \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} P_0 \sqrt{T_0} (1 + r) 2^{-\frac{3}{4}}, \\
l = x + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; \quad d_0 = \max(P_0 T_0 (1 + r); P_0 \sqrt{T_0} (1 + r) 2^{-\frac{3}{4}}), \\
\|H_i[0, 0]\|_C \leq r(1 - d): \\
\|H_i[U, W]\|_C \leq \|H_i[U, W] - H_i[0, 0]\|_C + \|H_i[0, 0]\|_C \leq d_i 2r + r(1 - d) \leq dr + r(1 - d) = r, \\
L_{H_i}, (i = \overline{1, 2}) - \text{коэффициенты Липшица операторов } H_i, (i = \overline{1, 2}).
\end{cases}$$

В самом деле, если не выполняется условие (16), то используя метод подобластей [5], можем доказать вышеуказанные условия теоремы Банаха. Идея метода подобластей состоит в том, что отрезок $[0, T_0]$ делим на элементарные части равномерно с шагом h , чтобы на каждой элементарной части выполнялись условия (16), причем

$$\begin{cases} U_k(t_k, x) = U_{k+1}(t_k, x), (k = \overline{1, n}); U_1(0, x) = U(0, x) = \varphi(x), \\ W_k(t_k, x) = W_{k+1}(t_k, x), (k = \overline{1, n}); W_1(0, x) = W(0, x) = \varphi'(x). \end{cases} \quad (17)$$

Тогда (15), действительно имеет единственное решение в $C(\bar{D}_0)$. Поэтому, не нарушая общности, предполагаем, что при условии (16) функции $(U; W)$ существуют, причем определяются единственным образом, как решение системы (15). При этом решение этой системы находим методом Пикара

$$\begin{cases} U_{n+1}(t, x) = H_1[U_n, W_n], \\ W_{n+1}(t, x) = H_2[U_n, W_n], \forall (t, x) \in \bar{D}_0, (n = 0, 1, \dots), \end{cases} \quad (18)$$

где для простоты $U_0, W_0 = 0$ — начальные приближения. Следовательно, учитывая выводы метода Пикара, находим, что построенные последовательности функций по правилу (18) $\{U_n\}_0^\infty, \{W_n\}_0^\infty$ являются сходящимися и фундаментальными в $S_r(0)$, причем элементы построенной последовательности принадлежит $S_r(0)$, доказывается на основе выражения (16). Значит, последовательности $\{U_n\}_0^\infty, \{W_n\}_0^\infty$ сходятся к пределу $(U; W)$:

$$\begin{cases} E_{n+1} = \|U_{n+1} - U\|_C + \|W_{n+1} - W\|_C; \quad E_0 = \|U\|_C + \|W\|_C; \\ E_{n+1} \leq dE_n \leq \dots \leq d^{n+1}E_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d < 1} 0, \\ E_0 \leq (1-d)^{-1}N_0. \end{cases} \quad (19)$$

А это означает, что

$$\begin{cases} U_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} U, \\ W_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} W, \forall (t, x) \in \bar{D}_0. \end{cases} \quad (20)$$

Лемма 1. В условиях (а₁), (2), (3), (16) и (20) система (15) разрешима, причем $U \in G_\lambda^2(D_0)$.

Доказательство. При выполнении условий (а₁), (2), (3), (16) и (20) система (15) разрешима и решение этой системы $(U; W)$ определяется как предел последовательностей $\{U_n\}_0^\infty, \{W_n\}_0^\infty$.

Далее, учитывая условия (6) и норму пространства $G_\lambda^2(D_0)$:

$$\|U\|_{G_\lambda^2(D_0)} = \|U\|_{C^{0,2}(\bar{D}_0)} + \sup_{\bar{D}_0} \int_0^t \lambda(t) |U_t(t, x)| dt, \quad (21)$$

имеем

$$\|U\|_{G_\lambda^2(D_0)} \leq M_0. \quad (22)$$

Что и требовалось доказать.

В) Чтобы найти $f(t), (f(0) = 0)$ поступим следующим образом, так как имеет место (5) и (11), то имеем уравнение Вольтерра первого рода [5]:

$$\int_0^t \gamma(v) f(v) dv = F(t), \forall t \in [0, T_0] \quad (23)$$

с условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} C_\phi^1[0, T_0] \ni F(t) \equiv \psi(t) - M_1(t, x_0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) P[\nu, x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; U(t, x_0 + \\ + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)})] W(t, x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) d\tau d\nu \equiv (B_0[U, W])(t): \\ F(0) = 0; |F(t) - F(s)| \leq C_0 |\phi(t) - \phi(s)|, (0 < C_0 = \text{const}; \phi(t) = \int_0^t \gamma(s) ds), \\ F_\delta(t): \|F_\delta(t) - F(t)\|_{L_\gamma^2(0, T_0)} \leq A(\delta), \left(\frac{A(\delta_\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right), \end{array} \right.$$

(24)

то уравнение (23) регуляризуемо в пространстве $L_\gamma^2(0, T_0)$, т.е.

$$\varepsilon f_\varepsilon(t) + \int_0^t \gamma(s) f_\varepsilon(s) ds = F_\delta(t), \quad (25)$$

или учитывая для ядра $(-\frac{1}{\varepsilon} \gamma(s))$ резольвенту

$$R_0(t, s, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \gamma(s) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi(t) - \phi(s))), (s \leq t), \quad (*)$$

уравнение (25) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(t) = & -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \gamma(s) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi(t) - \phi(s))) [F_\delta(s) - F(s) + F(s) - F(t)] ds + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} (F_\delta(t) - F(t)) + \frac{1}{\varepsilon} F(t) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi(t)). \end{aligned} \quad (25)^*$$

Оценивая (25)*, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\int_0^t \gamma(s) \exp(-2\frac{1}{\varepsilon} (\phi(t) - \phi(s))) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|F_\delta(t) - F(t)\|_{L_\gamma^2(0, T_0)} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \gamma(s) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} (\phi(t) - \phi(s))) C_0 |\phi(t) - \phi(s)| ds + \frac{1}{\varepsilon} |F_\delta(t) - F(t)| + \\ + \frac{1}{\varepsilon} C_0 \phi(t) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi(t)) \leq A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon}} + C_0(1 + e^{-1}) + \frac{1}{\varepsilon} |F_\delta(t) - F(t)|, \\ 1 + e^{-1} < 2; \sup_{\theta \geq 0} \theta \exp(-\theta) = e^{-1}, \quad (\theta = \frac{1}{\varepsilon} \phi(t)) \end{array} \right.$$

при этом учитывая норму $L_\gamma^2(0, T_0)$, имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_\varepsilon(t)\|_{L_\gamma^2} \leq 4[A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon}} + 2C_0] \left(\sup_{[0, T_0]} \int_0^t \gamma(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\varepsilon} 4 \|F_\delta(t) - F(t)\|_{L_\gamma^2(0, T_0)} \leq \\ \leq 4[(A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon}} + 2C_0) N_1 + \frac{1}{\varepsilon} A(\delta_\varepsilon)] \leq N_2, \\ \left(\sup_{[0, T_0]} \int_0^t \gamma(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} = N_1, \\ \frac{A(\delta_\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, (0 < N_i, i = 1, 2). \end{array} \right. \quad (26)$$

Далее, на основе

$$f_\varepsilon(t) = f(t) + \xi_\varepsilon(t), \forall t \in C[0, T_0], \quad (27)$$

где $\xi_\varepsilon(t)$ является остаточной функцией, получим

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \gamma(s) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t) - \phi(s))) [F_\delta(s) - F(s)] ds + \frac{1}{\varepsilon} (F_\delta(t) - F(t)) - \Delta(\varepsilon, f), \\ \Delta(\varepsilon, f) \equiv f(t) \exp(-\frac{1}{\varepsilon} \phi(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \gamma(s) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t) - \phi(s))) [f(t) - f(s)] ds. \end{cases} \quad (28)$$

Предполагая [5]:

$$\begin{cases} \|\Delta(\varepsilon, f)\|_{L_\gamma^2} \leq k_0 \{ [\int_0^{\varepsilon^\beta} |f(\phi^{-1}(v))|^2 dv + \|f(t)\|_{L_\gamma^2}^2 e^{-\frac{2}{\varepsilon^{1-\beta}}}]^{\frac{1}{2}} + [\omega_f^2(\varepsilon^\beta) + 3\|f(t)\|_{L_\gamma^2}^2 e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}]^{\frac{1}{2}} \} = \\ = Q_0(\varepsilon), (1 < k_0 = \text{const}, 0 < \beta < 1), \\ \omega_f(\varepsilon^\beta) = \sup_{0 \leq h \leq \varepsilon^\beta} \|f(\phi^{-1}(u+h)) - f(\phi^{-1}(u))\|_{L^2}, \\ f(\phi^{-1}(u)) = 0, \text{ при } u \in [0, \phi(T_0)], \varepsilon^\beta < \phi(T_0), \end{cases} \quad (29)$$

при этом, учитывается если $f(t) \in L_\gamma^2(0, T_0)$, то $f(\phi^{-1}(u)) \in L^2(0, \phi(T_0))$ и

$$\|f(t)\|_{L_\gamma^2} = \|f(\phi^{-1}(u))\|_{L^2},$$

здесь $\|\cdot\|_{L^2}$ — это норма в $L^2(0, \phi(T_0))$.

Тогда на основе (29) из оценки (28) в смысле $L_\gamma^2(0, T_0)$ следует

$$\begin{cases} \|\xi_\varepsilon\|_{L_\gamma^2} \leq \Delta(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} [\sqrt{2^{-1}} + \sqrt{\varepsilon}] + Q_0(\varepsilon) = \Delta(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} C_1 + Q_0(\varepsilon) = O(Q_*(\varepsilon)), \\ \Delta(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0 (\Delta \delta_\varepsilon \rightarrow 0)} 0, (\sqrt{2^{-1}} + \sqrt{\varepsilon} \leq C_1 = 1 + \sqrt{2^{-1}}). \end{cases} \quad (30)$$

Следовательно, на основе полученных результатов следует, что уравнение (23)

регуляризуемо в $L_\gamma^2(0, T_0)$, причем имеет место

$$\begin{cases} \|f_\varepsilon(t) - f(t)\|_{L_\gamma^2} = \|\xi_\varepsilon\|_{L_\gamma^2} \leq O(Q_*(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \\ \|\tilde{f}(t)\|_{L_\gamma^2} \leq \|\tilde{f}(t) - \tilde{f}_\varepsilon(t)\|_{L_\gamma^2} + \|\tilde{f}_\varepsilon(t)\|_{L_\gamma^2} \leq O(Q_*(\varepsilon)) + N_2 \leq N_3. \end{cases} \quad (31)$$

Лемма 2. В условиях (24), (29) и (31), допустимая погрешность оценки между функциями f_ε, f будет порядка $O(Q_*(\varepsilon))$ в $L_\gamma^2(0, T_0)$.

Из результатов лемм 1, 2 можем сделать вывод, что функция $\Psi = (U; f)$ также определяется единственным образом в $W_\lambda^2(D_0)$, причем

$$\|\Psi\|_{W_\lambda^2(D_0)} = \|U\|_{G_\lambda^2(D_0)} + \|f\|_{L_\gamma^2(0, T_0)} \leq M_0 + N_3 = M_*. \quad (32)$$

Теорема 1. При условиях лемм 1, 2 и (32) обратная задача (1)-(3) разрешима в $W_\lambda^2(D_0)$.

II. В этом пункте решение задачи (1), (3), (7) с условием (а₂) строим в классе функций $\Psi \equiv (U, \tilde{f}) \in W_C(\bar{D}_0)$.

Известно, поскольку норма [4,8]: $\|\Psi\|_{W_\lambda^2(D_0)}$ подчинена $\|\Psi\|_{W_C(\bar{D}_0)}$, то из сходимости последовательности $\{\Psi_n\}_{n=0}^\infty$ в смысле $\|\Psi\|_{W_C(\bar{D}_0)}$ вытекает ее сходимость в $\|\Psi\|_{W_\lambda^2(D_0)}$, причем к тому же самому элементу, т.е., если решение задачи (1) ограничено в пространстве $W_C(\bar{D}_0)$, то следует

ограниченность и в $W_{\lambda}^2(D_0)$, обратное неверно. Поэтому результаты п. 1 является более общими, чем п.2.

Чтобы решать задачу (1)-(3), (7), предположим

$$\begin{cases} U = \varphi(x) + \int_0^t \tilde{f}(s) ds + V(t, x), \\ V|_{t=0} = 0, \forall x \in R, \\ V|_{x=x_0} = \psi(t) - \varphi(x_0) - \int_0^t \tilde{f}(s) ds, \end{cases} \quad (33)$$

причем

$$\begin{cases} U_t = \tilde{f}(t) + V_t(t, x), \\ U_x = \varphi_x(x) + V_x(t, x); \quad U_{x^2} = \varphi_{x^2}(x) + V_{x^2}(t, x). \end{cases}$$

Тогда из (1) с учетом (33) получим

$$V_t + P(t, x, \varphi(x) + \int_0^t \tilde{f}(s) ds + V(t, x))(\varphi_x(x) + V_x) = \mu_0(V_{x^2} + \varphi_{x^2}(x)), \forall (t, x) \in \bar{D}_0. \quad (34)$$

Следовательно, на основе метода Соболева из (34) следует

$$\begin{aligned} V = \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{ \mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + \int_0^v \tilde{f}(s_1) ds_1 + \\ + V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s)) \} ds dv, \end{aligned} \quad (35)$$

где (35) содержит неизвестных функций $(V; \tilde{f})$. Поэтому, с учетом (33) из (35) имеем

$$\begin{cases} Z(t) = \psi(t) - \varphi(x_0) - \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x_0-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{ \mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + \\ + Z(v) + V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s)) \} ds dv, \\ \int_0^t \tilde{f}(v) dv = Z(t), (Z(0) = 0). \end{cases} \quad (36)$$

Значит, на основе (35), (36) получим систему

$$\begin{cases} V = \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{ \mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + Z(v) + \\ + V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s)) \} ds dv, \\ \begin{cases} Z(t) = \psi(t) - \varphi(x_0) - \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x_0-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{ \mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + \\ + Z(v) + V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s)) \} ds dv. \end{cases} \end{cases} \quad (37)$$

Далее, дифференцируя первое уравнение (37) по x , получим систему интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра-Абея второго рода, т.е.:

$$\begin{cases}
V_x = W(t, x), \forall (t, x) \in \bar{D}_0, \\
V = \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{\mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + Z(v) + \\
+ V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s))\} ds dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \{\mu_0 \varphi_{\rho^2}(x + 2\tau \times \\
\times \sqrt{\mu_0(t-v)}) - P(v, x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}; \varphi(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) + Z(v) + V(v, x + \\
+ 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)})\} \times (\varphi_\rho(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) + W(v, x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}))\} d\tau dv \equiv \\
\equiv (H_0[V, Z, W])(t, x), \\
Z(t) = \psi(t) - \varphi(x_0) - \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x_0-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{\mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + \\
+ Z(v) + V(v, s))(\varphi_s(s) + V_s(v, s))\} ds dv \equiv (H_1[V, Z, W])(t), \\
W = \int_0^t \int_R \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\mu_0(t-v)}\right) \frac{s-x}{2\mu_0(t-v)} \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_0(t-v)}} \{\mu_0 \varphi_{s^2}(s) - P(v, s, \varphi(s) + Z(v) + \\
+ V(v, s))(\varphi_s(s) + W(v, s))\} ds dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \frac{\tau}{\sqrt{\mu_0(t-v)}} \{\mu_0 \varphi_{\rho^2}(x + 2\tau \times \\
\times \sqrt{\mu_0(t-v)}) - P(v, x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}; \varphi(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) + Z(v) + V(v, x + \\
+ 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)})\} \times (\varphi_\rho(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) + W(v, x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}))\} d\tau dv \equiv \\
\equiv (H_2[V, Z, W])(t, x), \\
\rho = x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}; \quad s - x = 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}, \\
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \mu_0 \varphi_{\rho^2}(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv = |\text{интегрируя по частям}| = \\
= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \frac{\tau}{\sqrt{t-v}} \sqrt{\mu_0} \varphi_\rho(x + 2\tau \sqrt{\mu_0(t-v)}) d\tau dv.
\end{cases} \tag{38}$$

где (38) – это система аналогичная к системе (15). Поэтому при условиях (16)-(20) система (38) разрешима, т.е. функции (V, Z, W) единственным образом определяются из (38) и $V \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$, $Z(t) \in C^1[0, T_0]$, $W \in \tilde{C}^{1,1}(\bar{D}_0)$. При этом

$$\begin{cases}
\|V\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{i=0}^2 \|V_{x^i}^{(i)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|V_t\|_{C(\bar{D}_0)} \leq M_1, \\
\|Z\|_{C^1[0, T_0]} \leq M_2, (M_1, M_2 = \text{const}).
\end{cases} \tag{39}$$

Поэтому, на основе формулы (33) имеем:

$$\begin{cases}
U = \varphi(x) + Z(t) + V(t, x), \\
\int_0^t \tilde{f}(s) ds = Z(t), \\
Z(t) \in C^1[0, T_0], \quad V \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0), \quad (\varphi(x) \in C^3(R)), \\
\|U\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} = M_3 = \text{const}.
\end{cases} \tag{40}$$

А это означает, что функция $U \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$ и считается известным. Тогда с учетом (36), имеем уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t \tilde{f}(\nu) d\nu = F(t), \quad (41)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} Z(t) &= \psi(t) - \varphi(x_0) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2) \{ \mu_0 \varphi_{\rho^2}(x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) - P(\nu, x_0 + \\ &+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; \varphi(x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) + Z(\nu) + V(\nu, x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) \} \times (\varphi_{\rho}(x_0 + \\ &+ 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}) + W(\nu, x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)})) \} d\tau d\nu \equiv F(t), \\ \rho &= x_0 + 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}; \quad s - x_0 = 2\tau\sqrt{\mu_0(t-\nu)}, \\ U_x &= W; \quad \psi(t) \in C^1[0, T_0], \\ F(t) &\in C^1[0, T_0], \quad F(0) = 0. \end{aligned} \right. \quad (42)$$

Поэтому, дифференцируя (41) получим

$$\tilde{f}(t) = F'(t) \in C[0, T_0]. \quad (43)$$

А это означает, что при условиях (40), (42) и (43) функция $\tilde{f}(t)$ определяется единственным образом в $C[0, T_0]$ по правилу (41). Следовательно, получим, что функция $\Psi = (U; \tilde{f})$ определяется единственным образом в $W_C(\bar{D}_0)$, причем

$$\|\Psi\|_{W_C(\bar{D}_0)} = \|U\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} + \|\tilde{f}\|_{C[0, T_0]} \leq M_* = \text{const}, \quad (44)$$

Отсюда следует, что обратная задача (1)-(3), (7) разрешима в $W_C(\bar{D}_0)$.

Замечание 1. Результаты относительно обратной задачи (1)-(3), (7) с

условием (а₂) получены с учетом (40), (42) и (43). Но при изучении обратных задач, где вырождаются уравнения Вольтерра первого рода (41), предполагается, что правая часть известна с некоторой погрешностью, так как иногда дополнительная информация о решении исходной задачи задается в априорах. Поэтому, вместо (42) предполагается условия

$$\left\{ \begin{aligned} &F(0) = 0; \quad F(t) \in C[0, T_0]: \quad |F(t) - F(s)| \leq L_F |t - s|, (0 < L_F = \text{const}), \\ &F_{\delta}(t): \quad \|F_{\delta}(t) - F(t)\|_C \leq A(\delta), \quad \left(\frac{A(\delta)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right). \end{aligned} \right. \quad (45)$$

Тогда на основе теории интегральных уравнений Вольтерра первого рода с условием (45) можем сказать, что уравнение (41) регуляризируемо в пространстве $C[0, T_0]$, т.е.

$$\varepsilon \tilde{f}_{\varepsilon}(t) + \int_0^t \tilde{f}_{\varepsilon}(s) ds = F_{\delta}(t) + \varepsilon \tilde{f}(0),$$

или учитывая резольвенту $R(t, s, \varepsilon) \equiv -\frac{1}{\varepsilon} \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(t-s))$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\varepsilon}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)) [F_{\delta}(s) - F(s) + F(s) - F(t)] ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} (F_{\delta}(t) - F(t)) + \frac{1}{\varepsilon} F(t) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t) + \tilde{f}(0) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t). \end{aligned} \quad (46)$$

Оценивая (2.1.46), имеем

$$\left\{ \begin{aligned} & \left| \tilde{f}_\varepsilon(t) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)) |F_\delta(s) - F(s) + F(s) - F(t)| ds + \frac{1}{\varepsilon} |F_\delta(t) - F(t)| + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} |F(t) - F(0)| \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t) + \left| \tilde{f}(0) \right| \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t) \leq 2A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} + L_F + \frac{1}{\varepsilon} L_F \times t \times \\ & \times \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t) + \left| \tilde{f}(0) \right| \leq 2A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} + L_F + L_F e^{-1} + Q_0 \leq 2A(\delta_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} + L_F(1 + e^{-1}) + Q_0 \leq N_1, \\ & \sup_{\theta \geq 0} \theta \exp(-\theta) = e^{-1}, (\theta = \frac{1}{\varepsilon}t); \quad \left| \tilde{f}(0) \right| \leq Q_0; \quad \frac{A(\delta_\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned} \right.$$

т.е.:

$$\left\| \tilde{f}_\varepsilon(t) \right\|_C \leq Q_1. \quad (47)$$

Поэтому, учитывая преобразование вида

$$\tilde{f}_\varepsilon(t) = \tilde{f}(t) + \xi_\varepsilon(t), \forall t \in [0, T_0], \quad (48)$$

из (46) на основе (48) получим

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)) [F_\delta(s) - F(s)] ds + \frac{1}{\varepsilon} (F_\delta(t) - F(t)) - A(\varepsilon, \tilde{f}), \\ A(\varepsilon, \tilde{f}) &\equiv (\tilde{f}(t) - \tilde{f}(0)) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)) [\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)] ds, (\tilde{f}(0) = q), \end{aligned} \right. \quad (49)$$

здесь предполагается [5]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left| \Delta(\varepsilon, \tilde{f}) \right| \leq 4 \left\| \tilde{f}(t) \right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + w_{\tilde{f}}(\varepsilon^\beta) = N_0(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \\ & w_{\tilde{f}}(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-v| \leq \varepsilon^\beta} \left| \tilde{f}(t) - \tilde{f}(v) \right|, \beta \in (0, 1). \end{aligned} \right. \quad (50)$$

Следовательно, проведя оценку относительно (49) с учетом (50), имеем

$$\left\| \xi_\varepsilon \right\|_C \leq O\left(2 \frac{A(\delta_\varepsilon)}{\varepsilon} + N_0(\varepsilon)\right) = O(N_*(\varepsilon)), \quad \left(\frac{A(\delta_\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \right). \quad (51)$$

Из полученных результатов следует, что (41) регуляризируемо в $C[0, T_0]$,

причем имеет место

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\| \tilde{f}_\varepsilon(t) - \tilde{f}(t) \right\|_C = \left\| \xi_\varepsilon \right\|_C \leq O(N_*(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \\ & \left\| \tilde{f}(t) \right\|_C \leq \left\| \tilde{f}(t) - \tilde{f}_\varepsilon(t) \right\|_C + \left\| \tilde{f}_\varepsilon(t) \right\|_C \leq O(N_*(\varepsilon)) + Q_1. \end{aligned} \right. \quad (52)$$

Лемма 3. В условиях (42), (52), допустимая погрешность оценки между решениями уравнений (41), (46) будет порядка $O(N_*(\varepsilon))$ в $C[0, T_0]$.

Поэтому, с учетом (40), (52) и функция $\Psi = (U; \tilde{f})$ определяется единственным образом в $\Psi \in W_C(\bar{D}_0)$ при этом получим

$$\left\| \Psi \right\|_{W_C(\bar{D}_0)} = \left\| U \right\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} + \left\| \tilde{f} \right\|_{C[0, T_0]} \leq M_2 = \text{const}. \quad (53)$$

Теорема 2. При условиях (a₂), (2), (3), (7) и (53) обратная задача (1)-(3), (7) разрешима в $W_C(\bar{D}_0)$.

Замечание 2. Если функция $P(t, x, U)$, входящая в уравнения (1) определяется в виде $P(t, x, U) \equiv U$, то уравнение (1) называется уравнением Бюргерса

$$U_t + UU_x = \mu_0 U_{x^2} + \tilde{f}(t), \forall (t, x) \in \bar{D}_0, (D_0 = (0, T_0) \times R), \quad (54)$$

при этом (54), (2), (3) и (7) называется обратной задачей Бюргерса с фиксированным параметром, когда выполняется условие (4).

Все результаты теоремы 2 имеют место для задачи Бюргерса (54), (2), (3), когда задается условие (7).

Литература

1. *Андерсон Э.* Ударные волны в магнитной гидродинамике. Москва: Атомиздат, 1968. 271 с.
2. *Ворожцов Е. В., Яненко Н. Н.* Методы локализации особенностей при численном решении задач газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1985. 224 с.
3. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г.* Теорема единственности некоторых нелинейных обратных задач уравнения параболического типа // Докл. АН СССР 208. № 3, 1973. С. 531-532.
4. *Омуров Т. Д.* Существование, единственность и гладкость решения задачи Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью // КНУ им. Ж. Баласагына. Бишкек, 2014. 96 с.
5. *Омуров Т. Д., Рыспаев А. О., Омуров М. Т.* Обратные задачи в приложениях математической физики // КНУ им. Ж. Баласагына. Б., 2014. 192 с.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. Москва: Наука, 1977. 664 с.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Москва: Наука, 1978. 688 с.
8. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 443 с.
9. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977. 622 с.
10. *Friedman A.* Boundary estimates for second order parabolic equations and their application. J. of Math and Mech. Vol. 7. № 5, 1958. Pp. 771-791.