

BACK-NONLOCAL PROBLEMS IN UNLIMITED AREAS WHERE DEGENERATE NON-CLASSICAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE THIRD KIND

Omurov T.¹, Alybaev A.², Dzhumagulov K.³

ОБРАТНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, ГДЕ ВЫРОЖДАЕТСЯ НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Омуров Т. Д.¹, Алыбаев А. М.², Джумагулов К. Р.³

¹Омуров Таалайбек Дардайылович / Omurov Taalaibek - доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа;

²Алыбаев Анарбек Масалбекович / Alybaev Anarbek - кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и образовательных технологий;

³Джумагулов Кубат Рысбекович / Dzhumagulov Kubat – аспирант, кафедра математического анализа, старший преподаватель,

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: на сегодняшний день нельзя не затронуть высокую актуальность исследований в области теории интегральных уравнений первого и третьего рода, а также важность прикладного характера отдельных вопросов теории обратных задач математической физики, быстрыми темпами развивающейся в тесном контакте с теорией интегральных уравнений. В данной работе используются методы сведения обратных задач к интегральным уравнениям типа Вольтерра, а также сделано обобщение результатов исследований интегрального уравнения типа Вольтерра третьего рода для обратно-нелокальной задачи с интегральной зависимостью в неограниченной области. Для исследования разрешимости уравнения использованы методы регуляризации и интегральных преобразований.

Abstract: today, it is impossible not to touch the high relevance of research in the theory of integral equations of the first and the third kind, as well as the importance of the applied nature of certain questions in the theory of inverse problems of mathematical physics, rapidly developing in close contact with the theory of integral equations. In this study we used information methods of inverse problems to integral equations of Volterra type and made a generalization of the results of research Volterra integral equation of the third kind of back-nonlocal problem with integral dependence in an unbounded domain. To investigate the solvability of the equation used regularization methods and integral transforms.

Ключевые слова: обратно-нелокальная задача, регуляризация, вырожденное уравнение, неограниченная область, коэффициент Липшица.

Keywords: inverse non-local problem, regularization, the degenerate equation, unbounded domain, Lipschitz coefficient.

Введение

В настоящее время исследован ряд вопросов теории интегральных уравнений третьего рода, к которым сводятся обратные задачи математической физики [2, 3, 5, 7, 8] и др. Ведущую роль в исследованиях занимают обратные задачи, где вырождаются интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода [1, 2, 4, 6, 10]. При этом для доказательства устойчивости решений указанных уравнений разработаны регуляризационные методы. В данной работе рассмотрена обратная задача, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода.

I. Пусть рассматривается уравнение вида

$$\begin{cases} U_{tt} + \lambda U_{xx} = (Az)(t) + f(t, x, U(t, x)), \\ (Az)(t) \equiv pz + \int_0^t K_1(t, s)z(s)ds + \int_0^{N(t)} K_2(t, s)z(s)ds. \end{cases} \quad (1)$$

с условиями

$$U^{(i)}|_{t=0} = \phi_i(x), x \in R, (i = 0, 1) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i (U_t(t, x_i) + \lambda U_x(t, x_i)) = g(t), t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\beta = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \neq 0, \quad (4)$$

где $0 < \lambda$, $\alpha_i = \text{const}$, $f, p, K_i, N, \varphi_i, g$, - известные данные, причем

$$f \in C^1(\bar{\Omega}), \quad p(t) \in C[0, T], \quad \Omega = [0, T] \times R, \quad p(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad p(T) = 0, \\ \Omega = (0, T) \times R, \quad K_i(t, s) \in C^{0,1}(D_i), (i=1, 2), \quad K_1(t, t) \geq \alpha > 0, \quad K_2(t, t) \leq -\alpha < 0, \\ D_1 = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\};$$

$$N(0) = 0, \quad 0 \leq N(t) \leq t \leq T.$$

Так как (1)-(3) обратнo-нелокальная задача, то искомыми функциями являются

$$\Psi = (U, z) \in W_C(\bar{\Omega}) = \{(U, z) : U \in C^{2,1}(\bar{\Omega}), z \in C[0, T]\}, \quad \|\Psi\|_{W_C} = \|U\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} + \|z\|_{C[0, T]}.$$

II. Предположим, что имеет место

$$U_t + \lambda U_x = u(t, x), \quad \forall (t, x) \in \bar{\Omega}, \quad (5)$$

Тогда в соответствии с данным выражением (5) получим

$$U = \varphi_0(x - \lambda t) + \int_0^t u(\tau, x - \lambda(t - \tau)) d\tau \equiv (Bu)(t, x). \quad (6)$$

Далее, дифференцируя выражение (6) по переменным t и x соответственно, имеем:

$$\begin{cases} U_t = \varphi_{0t} \cdot (-\lambda) + u(t, x) + \int_0^t [u_{\tau}(\tau, x - \lambda(t - \tau))(-\lambda)] d\tau, \\ U_x = \varphi_{0x} + \int_0^t u_x(\tau, x - \lambda(t - \tau)) d\tau, (l = x - \lambda t, l_1 = x - \lambda(t - \tau)). \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда видно, что если второе уравнение из системы (7), умножив на коэффициент λ , подставим в уравнение (5), то получим тождество, поэтому, учитывая (5), (6) из уравнения (1) следует:

$$u_t = (Az)(t) + f(t, x, (Bu)(t, x)), \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x) + \lambda \varphi_0(x) \equiv \varphi_2(x), \quad \forall x \in R. \quad (9)$$

Следовательно, интегрируя (8) с условием (9) получим

$$u(t, x) = \varphi_2(x) + \int_0^t [(Az)(\tau) + f(\tau, x, (Bu)(\tau, x))] d\tau \equiv Qu(t, x). \quad (10)$$

Уравнение (10) содержит две неизвестные функции, то есть (u, z) . Поэтому для нахождения функции $z(t)$, учитывая условия задачи (3), (5) и (10), при этом, требуя $x = x_i$, имеем

$$g(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u(t, x_i) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left\{ \varphi_2(x_i) + \int_0^t (Az)(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau, x_i, (Bu)(\tau, x_i)) d\tau \right\} \quad (11)$$

Отсюда следует

$$\int_0^t (Az)(\tau) d\tau = \beta^{-1} \left\{ g(t) - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\varphi_2(x_i) + \int_0^t f(\tau, x_i, (Bu)(\tau, x_i)) d\tau \right] \right\} \equiv (B_1 u)(t). \quad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (10), имеем

$$u = \varphi_2(x) + \int_0^t f(\tau, x, (Bu)(\tau, x)) d\tau + B_1 u(t) \equiv (Hu)(t, x). \quad (13)$$

Очевидно, что уравнение (13) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода по переменной $t \in [0, T]$. И нетрудно увидеть однозначную разрешимость данного уравнения в пространстве $C^1(\bar{\Omega})$, когда выполняются условия [9]:

- 1) $L_H < 1$, L_H - коэффициент Липшица оператора H ,
- 2) $H : S_r(u_0) \rightarrow S_r(u_0)$, $S_r(u_0) = \{u \in C^1(\Omega) : |u - u_0| \leq r = \text{const}, \forall (t, x) \in \Omega\}$.

Лемма 1. При условиях 1) и 2), уравнение (13) разрешимо в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$.

Действительно, когда выполняются условия 1) и 2), то по отношению уравнения (13) применимо условие теоремы Банаха [9], и, следовательно, выполняется условие однозначной разрешимости данного уравнения в указанном пространстве. Также следует заметить, что при невыполнении условия 1), можно доказать указанные принципы теоремы Банаха, используя метод склеивания [8]. В этом случае идея метода состоит в том, что отрезок делим на элементарные части равномерно с шагом n , чтобы на каждой части выполнялись условия 1) и 2). Лемма 1 доказана.

III. Далее, чтобы найти неизвестную функцию $z(t)$, поступим следующим образом. Правую часть уравнения (12) обозначим через функцию $F(t)$, причем $F(0) = 0$, $F(t) \in C^1[0, T]$, тогда имеем

$$\int_0^t (Az)(\tau) d\tau = F(t), \quad (14)$$

или, дифференцируя равенство (14) по переменной t , получим $(Az)(t) = F'(t)$,

придавая значение оператору Az из условия задачи (1), запишем

$$\begin{cases} pz + \int_0^t K_1(t, s)z(s)ds + \int_0^{N(t)} K_2(t, s)z(s)ds = F'(t), \\ z|_{t=0} = F'(0)p^{-1}(0) = q_0 = \text{const}, \end{cases} \quad (15)$$

где (15) – это интегральное уравнение Вольтерра третьего рода.

Замечание 1. Если $F(0) \neq 0$, то (14) представляет собой некорректно поставленную задачу, этот случай подробно рассмотрен в работе [8], где установлена условная корректность интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а также построено особое решение.

Далее, интегрируя по частям левую часть уравнения (15), имеем

$$p(t)z(t) + K_1(t, t) \int_0^t z(s)ds - \int_0^t K_{1s}(t, s) \int_0^t z(\tau) d\tau ds - \int_0^{N(t)} K_{2s}(t, s) \int_0^s z(\tau) d\tau ds = F'(t)$$

или запишем в виде

$$\begin{cases} p(t)\theta'(t) + K_0(t)\theta(t) = F'(t) + G(\theta), \\ \int_0^t z(s)ds = \theta(t), \theta(0) = 0, \\ G\theta \equiv \int_0^t K_{1s}(t, s)\theta(s)ds + \int_0^{N(t)} K_{2s}(t, s)\theta(s)ds. \end{cases} \quad (16)$$

Докажем, что система (16) регуляризируема [7] в $W_C(\overline{\Omega})$, для этого введем возмущенную систему:

$$\begin{cases} (\varepsilon + p(t))\theta'_\varepsilon(t) + K_0(t)\theta_\varepsilon(t) = (G\theta_\varepsilon)(t) + F_0(t), \\ \delta z_\delta(t) + \int_0^t z_\delta(s)ds = \theta_\varepsilon(t) + \delta z(0), \\ \theta_\varepsilon(0) = 0, K_0(t) \equiv K_1(t, t) \geq \alpha > 0; F_0 \equiv F'(t), \end{cases} \quad (17)$$

где ε, δ - малые параметры.

Систему (17) эквивалентно преобразуем к следующему виду

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \int_0^t W(t, s, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \{G\theta_\varepsilon(s) + F_0(s)\} ds \equiv (P\theta)(t), \\ z_\delta(t) = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t W_0(t, s, \delta) \cdot [\theta_\varepsilon(s) - v_\varepsilon(t)] ds + \frac{1}{\delta} W_0(t, 0, \delta) \theta_\varepsilon(t) + W_0(t, 0, \delta) z(0), \end{cases} \quad (18)$$

где $W(t, s, \varepsilon)$, $W_0(t, s, \delta)$ -допускают следующие ограничения:

$$\begin{cases} W \equiv e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau) d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}}; |W(t, s, \varepsilon)| \leq e^{-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}}, \\ W_0 \equiv e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}, (s \leq t). \end{cases} \quad (19)$$

Исследуем первое уравнение системы (18), с этой целью, оценим указанное уравнение.

$$\begin{aligned} |\theta_\varepsilon(t)| &\leq \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}} \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \left\{ M_0 + M_1 \int_0^t |\theta_\varepsilon(s')| ds' + M_2 \int_0^{N(t)} |\theta_\varepsilon(s')| ds' \right\} ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}} d \left(-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)} \right) \times \{ M_0 + (M_1 T + M_2 \|N(t)\|_C T) \|\theta_\varepsilon(t)\|_C \} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon + p(\tau)}} \right) \{ M_0 + d_0 \|\theta_\varepsilon(t)\|_C \} \leq \frac{1}{\alpha} M_0 + \frac{1}{\alpha} d_0 \|\theta_\varepsilon(t)\|_C, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$M_0 = \sup_{[0, T]} |F_0(t)|, M_1 = \sup_{D_1} |K_{1s}(t, s)|, M_2 = \sup_{D_1} |K_{2s}(t, s)|, \quad d_0 = M_1 T + M_2 \|N(t)\|_C T,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\alpha} M_0$$

Пусть

$$\frac{1}{\alpha} d_0 = h < 1, \quad (21)$$

тогда из неравенства (20) имеем

$$\|\theta_\varepsilon(t)\|_C \leq (1-h)^{-1} \gamma_0, \quad (22)$$

причем очевидно, что

$$S_{z_0} \rightarrow S_{z_0} = \{ \theta_\varepsilon : |\theta_\varepsilon| \leq z_0, \forall t \in [0, T] \}, \quad (23)$$

а это означает, что θ_ε ограничено по норме в $C[0, T]$ и первое уравнение системы (18) имеет единственное решение в указанном классе функций.

Лемма 2. Если выполнены условия (21), (23), то первое уравнение системы (18) разрешимо, причем это решение сходится равномерно к функции $\theta(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действительно, при условиях (21), (23) первое уравнение системы (18) разрешимо в $C[0, T]$, так как оператор P , введенный в системе (18) является сжимающим и отображает область определения в себя.

Далее, учитывая условие

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta(t) + \xi_\varepsilon(t), \quad (24)$$

и первое уравнение системы (18), получим

$$\xi_\varepsilon(t) = \int_0^t W(t, s, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon + p(s)} \{ (G[\theta + \xi_\varepsilon])(s) - (G\theta)(s) - \varepsilon \theta_s(s) \} ds \equiv (Q\xi_\varepsilon)(t), \quad (25)$$

Оценим исходное уравнение (25)

$|\xi_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{\alpha} (M_1 T + M_2 \|N_0(t)\|_C T) \|\xi_\varepsilon(t)\|_C + \frac{1}{\alpha} r_0 \varepsilon$, тогда на основе (21) имеем

$$\|\xi_\varepsilon(t)\|_C \leq (1-h)^{-1} \frac{1}{\alpha} r_0 \varepsilon = N_0 \varepsilon, (N_0 = \frac{1}{\alpha} r_0). \quad (26)$$

Поэтому, с учетом условия (24) следует $\|\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)\|_C \leq N_0 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$,

то есть

$$\theta_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(t), \forall t \in [0, T]. \quad (27)$$

Что и требовалось доказать. Лемма 2 доказана.

Вернемся к системе (18) и исследуем второе уравнение. Для этого оценим его и получим следующее:

$$\|z_\delta(t)\| \leq L_{\theta_\varepsilon} (1 + e^{-1}) + |q_0| \leq 2L_{\theta_\varepsilon} + |q_0| \equiv N_0 = \text{const}, \quad (28)$$

то есть функция $z_\delta(t)$ ограничена по норме в $C[0, T]$, далее, выполнив подстановку вида

$$z_\delta(t) = z(t) + \eta_\delta(t), \forall t \in [0, T], \quad (29)$$

получим

$$\begin{cases} \eta_\delta(t) = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^t W_0(t, s, \delta) \{\theta_\varepsilon(s) - \theta(s)\} ds + \frac{1}{\delta} \{\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)\} + \Delta(\delta, z), \\ \Delta(\delta, z) = -\frac{1}{\delta} \int_0^t W_0(t, s, \varepsilon) \{z(t) - z(s)\} ds - W_0(t, 0, \delta)(z(t) - z(0)). \end{cases} \quad (30)$$

Оценивая (30), имеем

$$|\eta_\delta(t)| \leq \frac{1}{\delta^2} \int_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)} |\theta_\varepsilon(s) - \theta(s)| ds + \frac{1}{\delta} |\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)| + |\Delta(\delta, z)|, (|z| \leq r, \forall t \in C[0, T]), \quad (31)$$

следовательно

$$\begin{cases} \|\eta_\varepsilon(t)\|_C \leq 2N_0 \frac{1}{\delta} \varepsilon + \|\Delta(\delta, z)\|_C, \\ \|\Delta(\delta, z)\|_C \leq L_z (1 + e^{-1}) \delta \leq 2L_z \delta, \left(0 < L_z, \frac{\varepsilon}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)} 0 \right), \end{cases} \quad (32)$$

а это означает

$$\begin{cases} \eta_\delta(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \forall t \in C[0, T], \\ z_\delta(t) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \forall t \in C[0, T]. \end{cases} \quad (33)$$

Лемма 3. В условиях леммы 2 и условий (28), (33) функция $z_\delta(t)$ определяется единственным образом, причем равномерно сходится к функции $z(t)$ в $C[0, T]$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 1, 2 и 3, то обратнo-нелокальная задача (1)-(3) разрешима в $W_C(\bar{\Omega})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была изучена обратнo-нелокальная задача с интегральной зависимостью, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода. На основе метода регуляризации доказаны достаточные условия разрешимости обратной задачи в $W_C(\bar{\Omega})$.

Литература

1. Аниконов Д. С. К вопросу о единственности решения обратных задач для уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения, 1979. Т. 15. № 1. С. 3-9.
2. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
3. Бухгейм А. Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 207 с.

4. *Магницкий Н. А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // ЖВМ и МФ, 1979. Т. 19. № 4. С. 970-989.
5. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Дифференциальные уравнения. Т. 10. № 1, 1974. С. 100-111.
6. *Омуров Т. Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.
7. *Омуров Т. Д., Рыспаев А. О., Омуров М. Т.* Обратные задачи в приложениях математической физики. КНУ им. Ж. Баласагына. Б.: 2014. 192 с.
8. *Омуров Т. Д., Джумагулов К. Р., Омуров М. Т.* Регуляризация обратных задач, где вырождается уравнение Вольтерра первого рода с особым решением // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XLII междунар. науч.-практ. конф. № 5 (40). Новосибирск: СибАК, 2016. С. 98-110.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 496 с.
10. *Янно Я.* Регуляризация одного уравнения Вольтерра первого рода равносильного уравнению третьего рода // Учен. записки Тартусского гос. университета, 1987. Вып. 762. С. 16-30.