

Численные методы решения обратной задачи переноса

Туганбаев М. М.

*Туганбаев Марат Мансурович / Tuganbaev Marat Mansurovich – кандидат физико-математических наук, доцент,
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызская Республика*

Аннотация: в работе исследованы вопросы численного решения обратной задачи переноса на основе системы интегральных уравнений второго рода, к которой сведена исходная задача. Доказана сходимость приближенного решения к решению исходной задачи.

Ключевые слова: задача переноса, обратная задача, численные методы.

В работе [1] изучена обратная задача для уравнения

$$\frac{\partial f(\nu, t)}{\partial t} + a(\nu) \frac{\partial f(\nu, t)}{\partial \nu} + h(\nu) f(\nu, t) = V(t) F(\nu, t), \quad \nu \in R, t \geq 0$$

с начальным условием $f(\nu, t)|_{t=0} = f_0(\nu), \forall \nu \in R$,

дополнительной информацией

$$f(\nu, t)|_{\nu=\nu_0} = \psi_0(t), \quad \nu_0 \in R, \quad t \in R_+, \quad \psi_0(t) \in C^1(R_+)$$

и условием согласования $f_0(\nu_0) = \psi_0(0)$,

где доказана

Теорема. При выполнении условия

$$\max(\gamma_2; \gamma_1 \gamma_2) = d < 1,$$

$$1) \sup_{\Omega} \int_0^t \exp \left(- \int_{\rho(\nu, t, s)}^{\nu} \frac{h(\nu')}{a(\nu')} d\nu' \right) \| F(\rho(\nu, t, s), s) \| \leq \gamma_1 = const,$$

$$2) \sup_{R_+} \left| (F(\nu_0, t))^{-1} \right| \int_0^t \exp \left(- \int_{\rho(\nu_0, t, s)}^{\nu_0} \frac{h(\nu')}{a(\nu')} d\nu' \right) \left\| \frac{h(\rho(\nu_0, t, s))}{a(\rho(\nu_0, t, s))} \rho'_t(\nu_0, t, s) \| F(\rho(\nu_0, t, s), s) \| +$$

$$+ \| F_{\nu}(\rho(\nu_0, t, s), s) \| \rho_t(\nu_0, t, s) \| ds \leq \gamma_2 = const,$$

обратная задача разрешима в классе функций $W_C(\Omega_1) \times C(R_+)$, причем

$$\| f_{n+1} - f \| \leq d^{n+1} E_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty (d < 1)} 0,$$

$$\| V_{n+1} - V \| \leq d^{n+1} E_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty (d < 1)} 0, \quad E_0 = \| V - V_0 \|,$$

где

$$\| f \|_{W_C} = \| f \|_C + \| f_{\nu} \|_C + \| f_t \|_C.$$

Пусть

$$\begin{cases} f_t(x, t) + a f_x(x, t) + \frac{1}{1+x^2} f(x, t) = F_0(x, t) V(t), (x, t) \in \Omega_1, \\ f(x, 0) = f_0(x), x \in R; V(0) = V_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$f(0, t) = \psi(t), t \in [0, T], \psi \in C^1[0, T], \psi(0) = f_0(0), \quad (2)$$

$$0 < a = const, h(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2}, (x_1 = x = \nu \in R, x_2 = t \in [0, T])$$

где F_0, ψ, f_0 - известные гладкие функции, кроме того

$$F_0(x, t) \geq \alpha > 0, \forall (x, t) \in \Omega_1 = R \times [0, T]. \quad (3)$$

При этом надо определить пару функций (f, V) , удовлетворяющих задаче (1), (2), то есть получим коэффициентно-обратную задачу для дифференциального уравнения типа Каца.

Задача (1), (2) корректна [1] в пространстве с нормой $\|f\|_{W^0_C} = \|f\|_C + \|V\|_C + \|f_v\|_C + \|f_t\|_C$.

Поэтому рассмотрим реализацию численного метода для приближенного решения задачи (1), (2) на основе эквивалентных интегральных уравнений, которые получены в результате интегральных преобразований этой задачи, т. е.

$$f = f_0(x - at) \exp\left[-\frac{1}{a}(\arctg(x) - \arctg(x - at))\right] + \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{a}(\arctg(x) - \arctg(x - a(t - s)))\right] \times \\ \times F_0(x - a(t - s), s) V(s) ds \equiv (HV)(x, t), \quad (4)$$

$$V(t) = (F_0(0, t))^{-1} \{ \psi'(t) + \exp(-\frac{1}{a} \arctg(at)) \times [af_{0\rho}(-at) + \frac{1}{1+a^2t^2} f_0(-at)] + \\ + \int_0^t \exp(-\frac{1}{a} \arctg(a(t - s))) \times [aF_{0\rho}(-a(t - s), s) + \frac{1}{1+a^2(t - s)^2} F_0(-a(t - s), s)] V(s) ds \} \equiv \\ \equiv (PV)(t).$$

(5)

Если обозначим

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x, t) = f_0(x - at) \exp\left[-\frac{1}{a}(\arctg(x) - \arctg(x - at))\right], \\ N^0(x, t, s) \equiv \exp\left[-\frac{1}{a}(\arctg(x) - \arctg(x - a(t - s)))\right] \times F_0(x - a(t - s), s), \\ \varphi(t) \equiv (F_0(0, t))^{-1} \{ \psi'(t) + \exp(-\frac{1}{a} \arctg(at)) \times [af_{0\rho}(-at) + \frac{1}{1+a^2t^2} f_0(-at)] \}, \\ M^0(t, s) \equiv -(F_0(0, t))^{-1} \exp(-\frac{1}{a} \arctg(a(t - s))) \times [aF_{0\rho}(-a(t - s), s) + \frac{F_0(-a(t - s), s)}{1+a^2(t - s)^2}], \end{array} \right.$$

то из (4), (5) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, t) = \phi(x, t) + \int_0^t N^0(x, t, s) V(s) ds \equiv (HV)(x, t), \\ V(t) = \varphi(t) - \int_0^t M^0(t, s) V(s) ds \equiv (PV)(t), V(0) = V_0 = \varphi(0), \end{array} \right. \quad (6)$$

при этом

$$\phi: |\phi_{\tilde{\delta}} - \phi| \leq C_{1,1} \tilde{\delta}; \quad \varphi: |\varphi_{\tilde{\delta}} - \varphi| \leq C_{1,2} \tilde{\delta}, \quad 0 < C_1 = \max(C_{1,1}, C_{1,2}).$$

Численное решение (1), (2) построим на основе системы (6). С этой целью заменяем ее на систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i_2, j_1} = \phi_{\tilde{\delta} i_2, j_1} + \sum_{j_1=0}^{i_1} N^0_{i_2, j_1, j_1} V_{j_1} h, \\ V_{i_1} + \sum_{j_1=0}^{i_1} M^0_{i_1, j_1} V_{j_1} h = \varphi_{\tilde{\delta} i_1}, i_1 = \overline{1, N_1}, \end{array} \right. \quad (7)$$

где они могут быть решены при помощи стандартных методов численного анализа, которые будут показаны ниже, причем:

$$t \in [0, T], h: t_i = ih, i = \overline{0, N_1}; N_1 h \leq T < (N_1 + 1)h; V(0 = t_0) = V_0.$$

Рассмотрим

$$V_{i_l} + \sum_{j_l=0}^{i_l} M_{i_l, j_l}^0 V_{j_l} h = \varphi_{\delta_{i_l}}, \quad (8)$$

и обозначим через $V^h = \{\tilde{V}_{i_l}^h\}$, $(i_l = \overline{0, N_1})$ решение (8), погрешность приближенных значений введем в виде: $\tilde{\beta}^h = \{\tilde{\beta}_{i_l}^h\} \equiv \{V_{i_l} - \tilde{V}_{i_l}^h\}$, $i_l = \overline{0, N_1}$, при этом $\tilde{\beta}_0^h = V_0 - \tilde{V}_0^h$, $V_0 = \varphi(0 = t_0)$, $\tilde{V}_0^h$ приближенное значение, полученное при вычислении $\varphi(0)$. Чтобы оценить $\|\tilde{\beta}^h\|_{C_n}$, имеем

$$V_{i_l} + \sum_{j_l=0}^{i_l} M_{i_l, j_l}^0 V_{j_l} h = \varphi_{i_l} - R_{i_l}^0, \quad (9)$$

$$\text{где } R_{i_l}^0 = \int_0^{t_{i_l}} M^0(t_{i_l}, s) V(s) ds - h \sum_{j_l=0}^{i_l} M_{i_l, j_l}^0 V_{j_l},$$

$R_{i_l}^0$ остаточный член квадратуры прямоугольников. Следовательно, вычитая (8) из (9), получим:

$$[1 + hM_{i_l, i_l}^0] \tilde{\beta}_{i_l}^h + h \sum_{j_l=1}^{i_l-1} M_{i_l, j_l}^0 \cdot \tilde{\beta}_{j_l}^h = -\varphi_{i_l} + \varphi_{\delta_{i_l}} - R_{i_l}^0, \quad (i_l \geq 1). \quad (10)$$

$$h|M_{i_l, i_l}^0| \leq q < 1, i_l = \overline{1, N_1}, \quad \text{Пусть выполняется неравенство (11)}$$

тогда из (10), переходя к оценке, получим:

$$|\tilde{\beta}_{i_l}^h| \leq \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 \sum_{j_l=1}^{i_l-1} |\tilde{\beta}_{j_l}^h|], \quad (12)$$

$$\text{где } K_0 = \max_{0 \leq s \leq T} |M^0(t, s)|, |R_{i_l}^0| \leq r(h).$$

Замечание 1. Здесь локальная погрешность $R_{i_l}^0$ имеет во всех узлах один и тот же порядок малости относительно h , т.е. погрешность $R_{i_l}^0$ при всяких i_l имеет представление вида: $R_{i_l}^0 = h^k C_{i_l}(h), C_{i_l}(h) \rightarrow C_{i_l} \neq 0$ когда $h \rightarrow 0$.

$$\text{Например, при } i_l = 1: |R_1^0| \leq r(h) = O(h^3), [0, t_1].$$

Введем величины B_{i_l} с $B_0 = |\tilde{\beta}_0^h|$ и рекурсивным соотношением

$$B_{i_l} = \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 \sum_{j_l=1}^{i_l-1} B_{j_l}], i_l \geq 1. \quad (13)$$

Очевидно, что $|\tilde{\beta}_{i_l}^h| \leq B_{i_l}$. Тогда из (11) и (12) следует

$$|\tilde{\beta}_{i_l}^h| \leq \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 \sum_{j_l=0}^{i_l-1} B_{j_l}] = B_{i_l}.$$

Обозначим $A_1 = \frac{1}{1-q} (r + C_1 \tilde{\delta}), A_2 = \frac{1}{1-q} hK_0$, тогда (13) примет вид

$$B_{i_l} = A_1 + A_2 \sum_{j_l=0}^{i_l-1} B_{j_l}, \quad (14)$$

$$B_{i_l} = (A_1 + A_2 B_0)(1 + A_2)^{i_l-1}, (i_l \geq 1) \quad (15)$$

является решением уравнения (14). Тогда при всяких значениях $i_l \geq 1$ для погрешности $|\tilde{\beta}_{i_l}^h|$ верна оценка

$$|\tilde{\beta}_{i_1}^h| \leq (A_1 + A_2 |\tilde{\beta}_0^h|)(1 + A_2)^{i_1-1} \leq \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 |\tilde{\beta}_0^h|] \times [1 + \frac{1}{1-q} hK_0]^{i_1-1}, (i_1 \geq 1)$$

$$|\tilde{\beta}_{i_1}^h| \leq \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 |\tilde{\beta}_0^h|] \times \exp(\frac{T}{1-q} K_0), \quad (16)$$

где $i_1 \leq N_1 \leq \frac{T}{h}$, причем $i_1 - 1$ заменим на $\frac{T}{h}$, учитывая $(1+u)^u \xrightarrow{u \rightarrow +0} e$,

т. е. искомая оценка погрешности приближенного решения (6) получена.

А это означает, что если приближенное решение уравнения (6) удовлетворяет (8), то справедлива оценка:

$$|V_{i_1} - \tilde{V}_{i_1}^h| \leq \frac{1}{1-q} [r(h) + C_1 \tilde{\delta} + hK_0 |\tilde{\beta}_0^h|] \times \exp(\frac{T}{1-q} K_0) = \gamma(h, \tilde{\delta}, h |\tilde{\beta}_0^h|), \quad (17)$$

$$\gamma(h, \tilde{\delta}, h |\tilde{\beta}_0^h|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, (h = \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}).$$

Далее, так как по условию $f(x, t)$ – точное решение системы (6), то с учетом (7), (17), справедлива оценка:

$$\|f(x, t) - \tilde{f}^h(x, t)\|_{C_n} \leq C_1 \tilde{\delta} + r_1(h) + K_1 h \gamma(h, \tilde{\delta}, h |\tilde{\beta}_0^h|), \quad (18)$$

$$\text{где } K_1 = \|N^0\|_{C_n}, |R_{i_2}| \leq r_1(h), R_{i_2} = \int_0^{t_{i_1}} N^0(x_{i_2}, t_{i_1}, s, \mathcal{V}(s)) ds - h \sum_{j_1=0}^{i_1} N_{i_2, j_1}^0 V_{j_1}.$$

Теорема 1. В условиях (17), (18) приближенное решение $(f_{i_2, i_1}^h; V_{i_1}^h)$ построится по правилу (7) и если h достаточно малое, то $\forall \varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ имеем: $|V_{i_1} - \tilde{V}_{i_1}^h| < \varepsilon, |f_{i_2, i_1} - \tilde{f}_{i_2, i_1}^h| < \varepsilon_1$.

Литература

1. Туганбаев М. М. Обратные задачи для нестационарного дифференциального уравнения //Труды ИВМ и МГ СО РАН. – Новосибирск, 2007. – Сер: информатика. – Вып. 7. – С. 310–316.